

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1°**

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 279

2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

B. 1. Λ, 2. Σ, 3. Λ, 4. Σ

**ΘΕΜΑ 2°**

$$\alpha. z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1 = 1^2 - 2i + i^2 + 3(i^4)^{502}i + 1 \\ = 1 - 2i - 1 + 3i + 1 = 1+i$$

$$\beta. \bar{z}_1 - z_2 = \bar{2+3i} - (1+i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i$$

$$|\bar{z}_1 - z_2| = |1 - 4i| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\gamma. \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2} \\ = \frac{2-2i+3i+3}{1+1} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

**ΘΕΜΑ 3°**

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta) = \alpha + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 5$$

$$f(1) = \alpha \cdot 1^2 + \beta = \alpha + \beta$$

Για να είναι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

$$\begin{aligned}
 \beta. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 + \beta - (\alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 - \alpha}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \alpha(x + 1) = 2\alpha \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x + 3) - (\alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3 - 5}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2
 \end{aligned}$$

Για να είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  πρέπει

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &\Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \\
 \alpha + \beta = 5 \stackrel{\alpha = 1}{\Rightarrow} 1 + \beta = 5 &\Leftrightarrow \beta = 5 - 1 \Leftrightarrow \beta = 4
 \end{aligned}$$

γ. Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = 4$  είναι  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \frac{2x + 3}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

- ΣΤΟ  $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0 = \beta
 \end{aligned}$$

$H(\varepsilon_1): y = x$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

- ΣΤΟ  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$H(\varepsilon_2): y = 2$  είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

## ΘΕΜΑ 4°

I.  $f'(x) = (x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1)' = 3x^2 + 2\lambda x - 3, x \in \mathbb{R}$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 1$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$

Από Θ. Fermat έχουμε :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

II.α. Για  $\lambda = 0$  είναι :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ και } f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○
$f(x)$				

Τ. μένιστο  
Τ. ελάχιστο  
Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$ ,  
ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$ .

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μένιστο για  $x = -1$  την τιμή

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για  $x = 1$  την τιμή

$$f(1) = 1^3 - 3 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

β. Πρέπει  $f'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

- $x_0 = -2$

$$y_0 = f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$(\varepsilon_1) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y + 1 = 9(x + 2) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y = 9x + 17$$

- $x_0 = 2$

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$$

$$(\varepsilon_2) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y - 3 = 9(x - 2) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y = 9x - 15$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = f(x) - \sqrt{x}, x \in [0, 1]$

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , ως διαφορά συνεχών

- $g(0) = f(0) = 1 > 0$

- $g(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{x} = 0$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(0, 1)$ .